SALÃO UFRGS 2015: ”DUAS TRANSFORMADAS DISCRETAS DE HILBERT”

PIBIC-CNPq 2014-2015

ARMAND AZONNAHIN

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

16 de Outubro de 2015

Conteúdo

Introdução

- Vinculado ao projeto de pesquisa “Estimativas de dois pesos para paraprodutos diádicos ”, onde procuramos desenvolver novas estimativas e representações para importantes operadores em análise harmônica diádica e discreta, o nosso estudo tem como objetivo principal “Desenvolver uma teoria de representação para as Transformadas Discretas de Hilbert (TDH) análoga à famosa representação de Stefanie Petermichl para a Transformada Contínua de Hilbert (TCH)”.

Introdução

- Vinculado ao projeto de pesquisa “Estimativas de dois pesos para paraprodutos diádicos ”, onde procuramos desenvolver novas estimativas e representações para importantes operadores em análise harmônica diádica e discreta, o nosso estudo tem como objetivo principal “Desenvolver uma teoria de representação para as Transformadas Discretas de Hilbert (TDH) análoga à famosa representação de Stefanie Petermichl para a Transformada Contínua de Hilbert (TCH)”.
- Petermichl provou que a TCH pode ser escrita como a média de uma família de operadores diádicos (operadores Sha).

Objetivo

- Desenvolver uma teoria de representação para as Transformadas Discretas de Hilbert (TDH) análoga à famosa representação de Stefanie Petermichl para a Transformada Contínua de Hilbert (TCH).

Metodologia

- Existem distintas maneiras de se definir a TDH, por isso o primeiro passo do nosso projeto foi descobrir qual das diferentes definições da TDH pode ser representada por uma representação análoga à representação de Petermichl para a TCH.

Metodologia

- Existem distintas maneiras de se definir a TDH, por isso o primeiro passo do nosso projeto foi descobrir qual das diferentes definições da TDH pode ser representada por uma representação análoga à representação de Petermichl para a TCH.
- Para tanto, adotamos uma metodologia baseada em experimentos numéricos e simulações no MATLAB onde comparamos o crescimento da norma das diferentes representações da TDH truncada com a média de operadores truncados de Sha.

Nomenclatura

Pelo "Valor Principal de Cauchy", escrevemos a Transformada Contínua de Hilbert do sinal $s(t)$ na seguinte forma :

$$H\{s(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(y)}{t-y} dy \qquad (1)$$

enquanto que definimos a Transformada Discreta Sequencial de Hilbert por :

$$(H^d x)(i) := \sum_{j \in \mathbb{Z}, j \neq i} \frac{x_j}{i-j} \qquad (2)$$

para $i \in \mathbb{Z}$, onde $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$,
e a Transformada Discreta Finita de Hilbert por :

$$(H_N x)(i) := \sum_{|j| \leq N, j \neq i} \frac{x_j}{i-j} \qquad (3)$$

para $|i| \leq N$, onde $x \in \mathbb{R}^{2N+1}$.

RESULTADO 1 (Provado por Loukas Grafakos)

A Transformada Discreta Finita de Hilbert H_N é limitada em $l^2(\mathbb{Z}_{2N+1})$, com cotas superiores independentes da dimensão N, isto é, existe uma constante $C > 0$ independente de N tal que :

$$||H_N x||_{l^2(\mathbb{Z}_{2N+1})} \leq C||x||_{l^2(\mathbb{Z}_{2N+1})} \tag{4}$$

para todos os vetores $x \in l^2(\mathbb{Z}_{2N+1})$.

RESULTADO 2 (Provado por Loukas Grafakos)

Se pudermos ver a Transformada Discreta Sequencial de Hilbert H^d como sendo o limite de H_N quando $N \to \infty$, então H^d deve ser um operador limitado em $l^2(\mathbb{Z})$, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que :

$$||H^d x||_{l^2(\mathbb{Z})} \leq C||x||_{l^2(\mathbb{Z})} \tag{5}$$

para todos os vetores $x \in l^2(\mathbb{Z})$.

Resultados Conhecidos

Aplicações da Transformada Discreta de Hilbert

- Descrição de sinais analíticos e redes de fase mínima;
- Geração do espectro de fase de um sinal dado o seu espectro em magnitude;
- Análise espectral ...

Resultados Novos

- A Transformada Discreta de Hilbert (DHT) para dados discretos $f(nT)$, $n = (-\infty, ..., -1, 0, 1, ..., \infty)$, é dada por:

$$DHT\{f(nT)\} = g(kT) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sum_{n,impar} \frac{f(nT)}{k-n}, & \text{se} \quad k \quad par, \\ \frac{2}{\pi}\sum_{n,par} \frac{f(nT)}{k-n}, & \text{se} \quad k \quad impar. \end{cases}$$

Resultados Novos

- A Transformada Discreta de Hilbert (DHT) para dados discretos $f(nT)$, $n = (-\infty, ..., -1, 0, 1, ..., \infty)$, é dada por:

$$DHT\{f(nT)\} = g(kT) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sum_{n,impar} \frac{f(nT)}{k-n}, & \text{se} \quad k \quad par, \\ \frac{2}{\pi}\sum_{n,par} \frac{f(nT)}{k-n}, & \text{se} \quad k \quad impar. \end{cases}$$

- A Transformada inversa é dada por:

$$f(nT) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}\sum_{k,impar} \frac{g(kT)}{k-n}, & \text{se} \quad n \quad par, \\ -\frac{2}{\pi}\sum_{k,par} \frac{g(kT)}{k-n}, & \text{se} \quad n \quad impar. \end{cases}$$

"Podemos mostrar que $f(nT)$ é bem definida ".

Resultados Novos

- Agora, para estabelecer a analogia entre a DHT e a Tansformada de Hilbert Contínua, podemos considerar o sinal $s(t)$, banda limitada a ω_0 rad/s. Então expandindo, temos:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \frac{sen\omega_0(t-nT)}{\omega_0(t-nT)} \tag{6}$$

onde $T = \frac{\pi}{\omega_0}$

Resultados Novos

- Agora, para estabelecer a analogia entre a DHT e a Tansformada de Hilbert Contínua, podemos considerar o sinal $s(t)$, banda limitada a ω_0 rad/s. Então expandindo, temos:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \frac{sen\omega_0(t-nT)}{\omega_0(t-nT)} \tag{6}$$

onde $T = \frac{\pi}{\omega_0}$

- Usando o "Valor Principal de Cauchy", escrevemos a Transformada Contínua de Hilbert de $s(t)$ na seguinte forma :

$$H\{s(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(y)}{t-y} dy \tag{7}$$

Resultados Novos

- Assim, temos:

$$H\{s(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t-y}s(nT)\frac{sen\omega_0(y-nT)}{\omega_0(y-nT)}dy \qquad (8)$$

Resultados Novos

- Assim, temos:

$$H\{s(t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t-y}s(nT)\frac{sen\omega_0(y-nT)}{\omega_0(y-nT)}dy \tag{8}$$

- Ou seja, usando a tabela de integral de transformadas, temos:

$$H\{s(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)[\frac{1-\cos\omega_0(t-nT)}{\omega_0(t-nT)}] \tag{9}$$

Resultados Novos

- Podemos também expandir $H\{s(t)\}$. Nos períodos de Nyquist $t = kT$, temos

$$H\{s(kT)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)[\frac{1 - \cos\pi(k-n)}{\pi(k-n)}] \tag{10}$$

- E portanto temos:

$$H\{s(kT)\} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sum_{n,impar} \frac{s(nT)}{k-n}, & \text{se} \quad k \quad par, \\ \frac{2}{\pi}\sum_{n,par} \frac{s(nT)}{k-n}, & \text{se} \quad k \quad impar. \end{cases} \tag{11}$$

- Vejamos então que a Transformada de Hilbert Contínua e a DHT são completamente análogas e os teoremas estabelecidos para a primeira podem ser facilmente extendidos para incluir a segunda. Pela Teoria de S. Petermichl, temos que:

$$H\{f(x)\} = -\frac{8}{\pi} < III > f(x)$$

$$H\{f(x)\} := -\frac{8}{\pi}\int_1^2\int_{\{0,1\}^{\mathbb{Z}}} III^{\beta,r} f(x) d\mu(\beta)\frac{dr}{r} \tag{12}$$

$$H\{f(x)\} =: -\frac{8}{\pi}\mathbb{E}III^{\beta,r} f(x)$$

Ou seja,

$$H =: -\frac{8}{\pi}\mathbb{E}III^{\beta,r} \tag{13}$$

Resultados Novos

- Por analogia, deduzimos que:

$$DHT\{f(nT)\} = -\frac{8}{\pi} < III > f(nT) \tag{14}$$

Ou seja,

$$DHT = -\frac{8}{\pi}\mathbb{E} < III > \tag{15}$$

- Portanto a Transformada Discreta Sequencial de Hilbert é uma Média de Operadores Diádicos Discretos (Operadores *Sha*).

CONCLUSÃO

Nas condições de Nyquist, provamos que a Transformada Discreta Sequencial de Hilbert H^d possui as mesmas características que a Transformada Contínua de Hilbert . Em particular ela é a Média de uma família de Operadores Diádicos Discretos (Operadores Sha).

Referências

- Lesley A.Ward, María Craistina Pereyra. Harmonic Analysis:From Fourier to Wavelets. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, Rholde Island, 2012. p. 410 ISBN 978-0-8218-7566-7
- Loukas Grafakos, An elementary proof of the square summability of the discrete Hilbert transform, Amer.Math. Monthly 101,N°5 (1994),456-460, Washington University
- Rami Shakarchi, Elias M. Stein. Fourier Analysis:An introduction. [S.l.]: Princeton University Press, 2003. p. "16-117". ISBN 0-691-11384-X

Contato

- ARMAND AZONNAHIN, Matemática Computacional, UFRGS, armand.azonnahin@gmail.com
- www.overleaf.com (galeria da UFRGS)

Obrigado pela Atenção !