

# Estudio del decaimiento $\alpha$ mediante los métodos WKB y diferencias finitas

John Erick Cabrera <sup>\*</sup>, David Leonardo Ricaurte <sup>†</sup>  
*Introducción a la Física Subatómica, Departamento de Física*  
*Universidad Nacional de Colombia*  
*Bogotá*

18/03/2016

---

## Resumen

Se pretende describir el decaimiento de una partícula  $\alpha$  encontrando los niveles de energía  $E_\alpha$  correspondientes a los estados ligados de la partícula producto de la desintegración. Los niveles de energía y los estados ligados se encuentran mediante dos métodos de aproximación: WKB y diferencias finitas. Posteriormente se halla el tiempo de vida medio  $\tau$ , se comparan los resultados con los de la literatura y se decide el mejor método de solución acorde con la literatura.

## 1 Introducción

Los constituyentes del núcleo atómico están sometidos a la interacción fuerte efectiva y a la interacción electrostática. Debido a que los núcleos se encuentran en un nivel de energía mayor al estado de energía base, el núcleo se encuentra en un estado inestable como consecuencia de una reacción nuclear generando un decaimiento radioactivo [1]. Uno de los tres tipos de decaimiento radioactivo es el decaimiento alfa  $\alpha$ , el cual es un tipo de decaimiento radioactivo que pasa de un núcleo precursor inestable a un núcleo descendiente estable, donde se emite una partícula  $\alpha$  ( ${}^4_2\text{He}$ ) por emisión espontánea y los núcleos precursores son de número atómico mayor a  $Z = 82$ . Entonces la reducción de la masa nuclear se produce por el potencial de Coulomb del núcleo reduciéndose la carga  $Ze$  en  $2e$ , ésta última correspondiente a la partícula  $\alpha$  [1].

La explicación del decaimiento radioactivo  $\alpha$  fue la confirmación del efecto túnel propuesto por George Gamow en 1928, en el cual una partícula puede penetrar una barrera potencial

---

<sup>\*</sup>jecabrerar@unal.edu.co 133624

<sup>†</sup>dlricaurte@unal.edu.co 133446

mayor a la energía cinética de la misma partícula, debido a que hay una probabilidad, de acuerdo a la mecánica cuántica, de que la partícula atraviese el potencial que ejerce el núcleo y logre escapar de este [2].

## 2 Marco Teórico

El potencial al cual se encuentran sometidos los nucleones, es la superposición del potencial electrostático para una esfera  $V_{em}$  con el producido por la interacción nuclear efectiva  $V_{fuerte}$  dado por la relación de Saxon-Woods, ver [3]:

$$V_{em} = \begin{cases} 2(Z-2)e^2 \frac{w^2 - r^2}{2w^3} & : r \leq w \\ \frac{2(Z-2)e^2}{r} & : r \geq w \end{cases} \quad (1)$$

$$V_{fuerte} = \frac{V_0}{e^{(r-w)/a} + 1} \quad (2)$$

En los dos potenciales  $w$  es el radio es el radio de la carga nuclear. En el potencial de Saxon-Woods  $V_0$  es la energía potencial máxima. En la figura 1 se grafica el potencial total  $V(r) = V_{em} + V_{fuerte}$ .

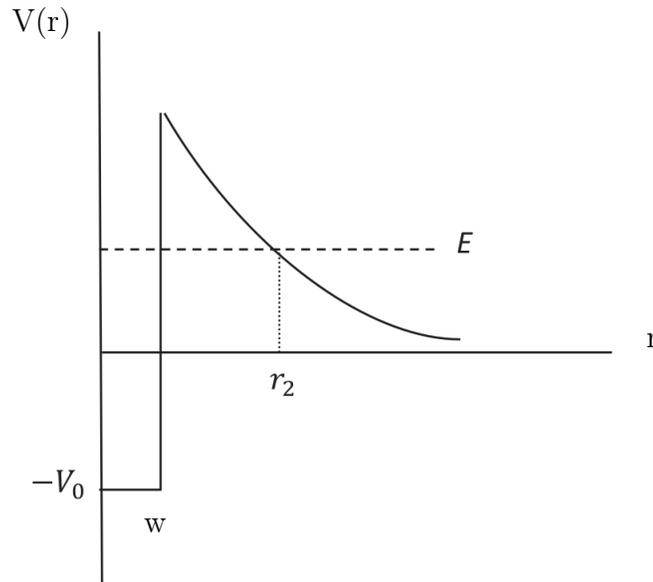


Figura 1: Potencial en función de la distancia  $r$  con respecto al centro del nucleido. Tomada de [5]

Por otro lado la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(r) \Psi = E \Psi$$

Donde  $V(r) = V_{em} + V_{fuerte}$ .

Como los dos potenciales dependen de la distancia entre coordenadas, la función de onda es  $\Psi = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$  y la ecuación de Schrödinger radial se escribe como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2u(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}u(r) \right) + V(r)u(r) = Eu(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2u(r)}{dr^2} + V_{eff}(r)u(r) = Eu(r) \quad (3)$$

Donde  $u(r) = R(r)/r$  y  $V_{eff}$  es el potencial efectivo.

La solución a la ecuación (3) no es sencilla debido a la forma del potencial.

## 2.1 Método WKB

Es un método de aproximación en el cual se incluyen potenciales variables considerando que estos no varían más rápido que la longitud de onda. Se halla una solución analítica bajo estas consideraciones, suponiendo que la onda difiere ligeramente de la onda plana:

$$\psi = Ae^{\pm ikx}$$

Con

$$k = \sqrt{2m(E - V)}/\hbar \quad (4)$$

Si  $E > V$  la partícula sometida a la barrera está en la región clásica y puede pasar la barrera; mientras que si  $E < V$  está en la región no clásica, ya que existe la probabilidad de que la partícula pase la barrera de potencial, este efecto se conoce como *efecto túnel*.

Para un potencial variable  $V = V(x)$ , los coeficientes de la onda son ahora funciones de la distancia:

$$\psi(x) = A(x)e^{\pm\phi(x)} \quad (5)$$

Para hallar  $A(x)$  se reemplaza (5) en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y unidimensional. Según el potencial dado, la solución cambiará si la energía  $V - E$  es clásica o de tunelamiento. En el caso de interés la partícula tiene una energía menor al máximo en el potencial, lo cual indica que este es efecto túnel.

La función de onda hallada en la región de la "barrera de potencial" variable, es decir, con un ancho  $w < r < r_2$  es:

$$\psi(x) \simeq \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx} \quad (6)$$

En donde  $p(x)$  es el momentúm de la partícula que atraviesa la barrera de potencial variable [4]:

$$p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))} \quad (7)$$

En la ecuación (6) se observa que el método falla cuando:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ 0 &= E - V(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Para esto se propone aproximar mediante el potencial mediante una función lineal en la región alrededor de  $E = V(x)$  :(Ver [4])

$$V(x) = E + V(0)x \quad (9)$$

El potencial (9) modifica la ecuación de Schrödinger a resolver:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (E + V(0)x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (10)$$

## 2.2 Tiempo de vida medio

La probabilidad de transmisión a través de una barrera de ancho  $a$  está dada por los cocientes de las amplitudes de las ondas incidentes  $|A|$  y transmitidas  $|F|$ ; en [4] se encuentra que:

$$\begin{aligned} T &= \frac{|F|^2}{|A|^2} \\ T &= e^{-2\gamma} \end{aligned} \quad (11)$$

Con

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx \quad (12)$$

El tiempo de vida medio está relacionado con el tiempo entre colisiones de la partícula  $\alpha$  con la "pared"  $t = 2\frac{r_1}{v}$  y con la probabilidad de transmisión:

$$\tau = 2\frac{r_1}{v} e^{-2\gamma} \quad (13)$$

## 2.3 Método De Diferencias Finitas

Mediante este método numérico se puede resolver la ecuación (3), convirtiéndola en una recurrencia. La derivada de segundo orden se aproxima como:

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} \approx \frac{u(i+1) - 2u(i) + u(i-1)}{\Delta^2} \quad (14)$$

Donde  $\Delta$  es el tamaño de paso para la variable  $r$ . Al reemplazar (14) en la ecuación de Schrödinger (10) se llega a la relación de recurrencia:(Ver [6])

$$u(i+1) = 2u(i) - u(i-1) + \Delta^2 \frac{l(l+1)}{r^2} u(i) + \frac{2m\Delta^2}{\hbar^2} (V(i) - E)u(i) \quad (15)$$

Para que la función de onda sea finita debe exigirse que  $u(0) = 0$  y para que converga en el infinito  $u(\infty) = 0$ . Las condiciones de frontera determinan las soluciones.

Obsérvese que en este caso la energía  $E$  con que sale la partícula  $\alpha$  debe ser un parámetro de entrada en la ecuación (15) empero, no todos los valores de la energía corresponden a una función de onda. Por esta razón antes se debe calcular la energía del estado base y subsecuentemente las otras autoenergías, que deben ser mayores a las del estado base.

### 3 Estado Actual del tema

El decaimiento alfa ha sido previamente estudiado. En 1928 Gamow propuso una solución conocida como efecto túnel [10] que está desarrollada en la sección 2.1. Fue el primer paso hacia el entendimiento de el fenómeno de decaimiento alfa, [4].

En 1996 se publicó un trabajo titulado "Understanding alpha decay "[9], donde se utilizan 4 métodos de cálculo y se resaltan tanto las fortalezas como las debilidades en la penetración de la partícula alfa a la barrera de potencial coulombiana. Estos métodos son: Autovalores complejos, sumas de estados de dispersión, integral de caminos semiclásico y método instantáneo [9]. En el presente trabajo se tiene en cuenta el método de autovalores complejos.

En 2015 se publicó un trabajo titulado "Effects of the generalised uncertainty principle on quantum tunneling" [5] en donde se agrega un parámetro  $\beta$  a la ecuación (5) siendo  $\beta$  el parámetro de corrección de GUP (Generalised Uncertainty Principle), el momentúm  $p(x)$  queda modificado como  $p(x) = p_0(1 + \beta p_0^2)$ . Reemplazando el momentúm en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, modifica el hamiltoniano y por ende modifica también la función de onda que se halla en la región de la barrera de potencial y también hace una nueva corrección a la probabilidad de tunelamiento [5].

### 4 Planteamiento del problema

Encontrar los estados ligados para una partícula  $\alpha$  producto de la desintegración de el núcleo radiactivo  $Pu^{238}$  ; tanto numéricamente [7] como por métodos de aproximación analíticos en las regiones que sea posible (ver [5], [4]) y comparar los métodos para encontrar el más eficiente.

Encontrar otras características de la partícula  $\alpha$  como el tiempo de vida medio  $\tau$  y la energía  $E_\alpha$ .

La partícula alfa esta confinada en un pozo potencial cuántico esférico generado por los nucleones que constituyen el átomo. Si observamos la ecuación (2),  $a$  representa el espesor de la corteza nuclear la cual por convención determina que la densidad de carga nuclear se encuentra entre (10 – 90)% [8]. Si asociamos esto al efecto tunel y al método de Gamow, los límites del punto de retorno serían los radios  $r_1$  y  $r_2$  que se refieren a la corteza del núcleo, luego la partícula alfa debe superar ese potencial coulombiano para quedar como partícula libre.

## 5 Justificación

La comprensión del decaimiento alfa  $\alpha$  es interesante debido al entender este fenómeno que se presenta en la naturaleza, podemos tener un concepto mas claro de la inestabilidad que se presenta en los núcleos atómicos, permitiendo entender su naturaleza y además nos sirve para poder diseñar plantas de fisión nuclear para generación de gran cantidad de energía. También el decaimiento alfa  $\alpha$  es estudiada en cosmogénesis cuántica, tunelamiento de radiación gravitatoria, superconductividad,

Por otro lado, para calcular la probabilidad de transmisión se necesita haber resuelto la ecuación de Schrödinger, sin embargo, debido a la forma complicada del potencial es difícil encontrar una solución para una energía dada  $E$ . De ahí que sea necesario calcular la solución utilizando otros métodos.

## 6 Objetivos

### 6.1 General

Describir el decaimiento  $\alpha$ , encontrando los estados ligados, el tiempo de vida media  $\tau$  y la energía  $E_\alpha$ , usando dos métodos de aproximación.

### 6.2 Específicos

1. Hallar los estados ligados por el método WKB para el decaimiento  $\alpha$  en el  $Pu^{238}$ .
2. Hallar mediante el método de diferencias finitas en la ecuación de Schrödinger los estados ligados
3. Encontrar el tiempo de vida medio  $\tau$  para el  $Pu^{238}$ .
4. Comparar los resultados obtenidos y mirar en qué rangos difieren con respecto a valores de la literatura.

## 7 Metodología

1. De acuerdo a la gráfica 1 el método WKB debe ser aplicado en diferentes regiones, una donde  $V(r) > E$ , para la cual solución será de la forma (6), mientras que alrededor del punto para el cual  $V(r) = E$  se estudiará la solución a la ecuación de Schrödinger con el potencial descrito en (9).
2. Usando la ecuación de diferencias encontrada en (15) se encuentra la solución numérica de los estados ligados. Encontrándose previamente la energía del estado base  $E$  mediante el método de bisección, tal como lo describe [6], luego se hayan las energías de los estados excitados.

3. Para cada uno de los métodos mencionados se puede calcular el tiempo de vida medio con la ecuación (13) ya que se han obtenido previamente los niveles de energía y se conoce la forma de los potenciales. Se analizará la dependencia de el tiempo de vida medio con los niveles de energía de la partícula  $\alpha$ .
4. Se compararán los resultados obtenidos del tiempo de vida medio  $\tau$  en el método WKB y en el método de diferencias finitas con respecto a los valores obtenidos en el artículo [7] y/o encontrados en la literatura.

## 8 Resultados esperados

Inicialmente se espera modelar de forma exitosa el decaimiento de la partícula  $\alpha$  encontrando los parámetros característicos del decaimiento. Se espera tener un mejor criterio para decidir el método más adecuado (WKB o diferencias finitas) con base a la comparación de los resultados con los de la literatura.

## 9 Cronograma

En la tabla 1 se muestra un cronograma estimado de las actividades a realizar condicionado a las fechas de entrega.

Tabla 1: Cronograma

Marzo 18	Entrega del proyecto
Marzo 18-Abril 4	Solución de la ecuación de Schrodinger por método de diferencias finitas
Abril 4-Abril 24	Solución de la ecuación de Schrodinger por método de WKB
Abril 25	Reporte avance del proyecto
Abril 25- Mayo 9	Culminación de los objetivos específicos
Mayo 9-22	Análisis e interpretación de resultados obtenidos
Mayo 23-27	Trabajo final y exposiciones

## Bibliografía

- [1] Eisberg-Resnick *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2a ed, Limusa. 1985
- [2] [https://es.wikipedia.org/wiki/Efecto\\_t%C3%BAnel](https://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_t%C3%BAnel)
- [3] R. D. Woods and D. S. Saxon, Phys. Rev. **95**, 577–578 1954.
- [4] Griffiths D. *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall Inc. 1995
- [5] Blado G. et. al., Eur. J. Phys. **37**, 025401 2016.

- [6] Cheng L. et. al Am. J. Phys.,**68**, 9, September 2000
- [7] D. Duarte. P.B. Siegel,Am. J. Phys. **78** (9), September 2010
- [8] A.Ferrer Soria.Física nuclear y de partículas.2da edición.
- [9] Barry R. Holstein et. al.,Am. J. Phys. **64**, Noviembre 1996.
- [10] G. Gamow,"Zur Quantentheorie des Atomkernes". Z. Physik **51**, 204 (1928)