積分のための双曲線関数

cunitac

2019 年 10 月 11 日

1　はじめに

これはあくまで「積分のための」双曲線関数を扱うために必要な最小限の知識を提供する資料である。道具としての双曲線関数の学習だと思ってほしい。たとえば双曲線関数という名前の意味にすら触れることはない。また、$\tanh, \mathrm{sech}, \mathrm{cosech}$ などはほとんど登場しない。少なくとも高校レベルの微積分においては、これらはさほど重要ではないからである。ただし、三角関数と似通った性質を持ち、興味深いものであるから、いろいろと研究してみることをすすめる。

2　定義

以下の式によって、sinh(双曲線正弦関数; hyperbolic sine)、および cosh(双曲線余弦関数; hyperbolic cosine) を定義する。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2}$$

e は自然対数の底である。定義から明らかに、sinh は奇関数、cosh は偶関数である。また、$\tanh, \mathrm{sech}, \mathrm{cosech}$ は、$\sinh, \cosh$ から三角関数と同様に定義される。いちいちハイパボリックというのは長いので、俗に sinh をシャイン、cosh をコシャインと読むことがある。

ともに定義域は実数全体である。sinh の値域は実数全体であるが、cosh の値域は 1 以上の実数となる。cosh のとる値が 1 未満になり得ないことは相加相乗平均の関係より証明できる。

余談であるが、三角関数においても、似た形の等式が成り立つ。

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{3}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{4}$$

i は虚数単位である。$e^{ix} = \cos x + i \sin x$(オイラーの公式) を認めれば容易に導かれる。これに関連して、双曲線関数は多くの点で三角関数と類似した性質を持つ。

3　相互関係

相互関係とは言っても、$\sinh, \cosh$ だけを紹介するので、重要な公式はただ一つである。

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{5}$$

上記の式[1]は、定義より容易に証明されれる。これを変形して、

$$\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1 \tag{6}$$
$$\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 \tag{7}$$

のふたつの公式も得られる。とくに (6) はよく用いるので、(5) の代わりにこの形で覚えておいてもよい。

4　加法定理

三角関数における加法定理と同様のものを、双曲線関数においても考えることができる。

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \tag{8}$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \tag{9}$$

sinh は奇関数、cosh は偶関数であったから、$x+y$ の代わりに $x-y=x+(-y)$ とした場合には、中央の符号が逆転するのみである。これらの公式は、定義より容易に導かれる。また、(8),(9) において、$y=x$ とすることで、双曲線関数版の倍角公式[2]が導かれる。

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \tag{10}$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \tag{11}$$

(11) に (5) を組み合わせることで、以下のような別の形を得ることができる。

$$\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1 \tag{12}$$
$$= 2\cosh^2 x - 1 \tag{13}$$

また、これらより双曲線関数版の半角公式[3]も得られる。

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \tag{14}$$
$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2} \tag{15}$$

三角関数版と同じように、(15) はよく用いるので、覚えてしまうことをすすめる。

5　導関数・不定積分

導関数は、定義より計算することができる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x \tag{16}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x \tag{17}$$

[1]三角関数で $\cos^2 x$ と書けば $(\cos x)^2$ を示すのと同じように、$\cosh^2 x$ は $(\cosh x)^2$ のことである。
[2]実は双曲線関数と角度には関係がなく、この用語が適当とは思えないが、三角関数に合わせることにする。
[3]$\cosh \frac{x}{2}$ などと書かないのは、私の好みである。また、積分に利用するときにこの形が多い。

微分すると入れ替わるような性質を持っていることがわかる。ここから直ちに不定積分も得られる。

$$\int \sinh x \ \mathrm{d}x = \cosh x + C \tag{18}$$

$$\int \cosh x \ \mathrm{d}x = \sinh x + C \tag{19}$$

C は積分定数である。当然ながら積分によっても入れ替わるような性質を持っていることがわかる。

6 逆関数

積分への利用のためには、双曲線関数、およびその逆関数の具体値が必要となることがあるから、求め方を考える。

双曲線関数には、三角関数における有名角 ($\frac{\pi}{6}$ の整数倍) のようなものは特にない。具体値が欲しい時はその都度、定義式に代入して求める。(そう複雑な計算になることはないが、最もよく使うであろう $\sinh 0 = 0$ は覚えておくと便利である。)

ところで、三角関数の逆関数 $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ の計算は、ほぼ有名角における各関数 $\sin, \cos$ の値に頼ったものであった。双曲線関数ではその手法は使えない。しかしながら、逆関数そのものを具体的に求めることができる。以下で cosh の逆関数を実際に求める。

$x = \cosh y$ とおく。$y = \cosh^{-1} x$ であるから、y を求める。cosh の定義より、

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \tag{20}$$

両辺に $2e^y$ をかけて整理すると、

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \tag{21}$$

これは e^y についての二次方程式であるから、解の公式より

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \tag{22}$$

$x = \cosh y > 1$ および $x > \sqrt{x^2 - 1}$ より、(22) の右辺は常に正の値をとる。よって両辺の自然対数[4]をとると、

$$y = \cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \tag{23}$$

$\sinh^{-1}$ も同様に導くことができて、下記の式で表される。

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \tag{24}$$

おそらく $\cosh^{-1}$ の導出よりは容易であるので、挑戦するとよいだろう。

積分への応用において便利なため、少し違う形の公式を挙げておく。

$$\sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a \tag{25}$$

$$\cosh^{-1} \frac{x}{a} = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln a \tag{26}$$

ただし $a > 0$ である[5]。実際のところよく使われるのはほぼ (25) であるが。

[4] 自然対数を ln で表しているが、これは私の好みである。log と書けばふつう常用対数のことを指すと考えている。

[5] $a \neq 0$ に拡張することもできるが、ほぼ利用価値がない。導出してみてもよい。

7　不定積分への利用

双曲線関数 $\sinh, \cosh$ を用いた置換積分が、$\sqrt{x^2+a^2}$ や $\sqrt{x^2-a^2}$ のような形 (a は任意の実数) を含む関数の積分に非常に有効であることを説明する。

$\sqrt{a^2-x^2}$ の形を含む関数の積分では、$x = a\sin t, \quad \mathrm{d}x = a\cos t\ \mathrm{d}t$ という置換積分が有効であった。これは、$a\cos t \geq 0$ ならば $\sqrt{a^2-(a\sin t)^2} = a\cos t$ という性質を利用したものである。

ここまでの内容を理解していれば、双曲線関数を用いた置換積分がどのようなものであるか、もう察しがついているだろう。正の実数 a について、$\sqrt{(a\sinh t)^2+a^2} = a\cosh t$ (t は任意の実数), $\sqrt{(a\cosh t)^2-a^2} = a\sinh t$ (t は負でない実数) という性質を利用したものに他ならない。また、三角関数の積分では途中で半角公式を利用するが、双曲線関数についても既に導出したので問題ない。

以下で例を示す。なお $x = 2\sinh t$ として置換を行う。すなわち $\sinh t = \frac{x}{2}$ であるから、$t = \sinh^{-1}\frac{x}{2} = \ln(x+\sqrt{x^2+4}) - \ln 2$ となる。また $\mathrm{d}x = 2\cosh t\ \mathrm{d}t$ である。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\cosh t\ \mathrm{d}t}{\sqrt{(2\sinh t)^2+4}} \tag{27}$$
$$= \int \frac{2\cosh t\ \mathrm{d}t}{2\sqrt{\sinh^2 t+1}} \tag{28}$$
$$= \int \frac{\cosh t\ \mathrm{d}t}{\sqrt{\cosh^2 t}} \tag{29}$$
$$= \int \frac{\cosh t\ \mathrm{d}t}{\cosh t} \tag{30}$$
$$= \int \mathrm{d}t = t + C_1 \tag{31}$$
$$= \sinh^{-1}\frac{x}{2} + C_1 \tag{32}$$
$$= \ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C_2 \tag{33}$$

C_1, C_2 は積分定数であり、$C_2 = -\ln 2 + C_1$ である。$-\ln 2$ は x に無関係な定数であるから、ふつう積分定数に含めてしまう。$\cosh t \geq 1$ から、$\sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$ とできることに注意する。

少し難しい例を挙げておく。置換の内容や積分定数は上の例と同様である。

$$\int \sqrt{x^2+4}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{(2\sinh t)^2+4}\cdot 2\cosh t\ \mathrm{d}t \tag{34}$$
$$= 4\int \cosh^2 t\ \mathrm{d}t \tag{35}$$
$$= 2\int (\cosh 2t + 1)\ \mathrm{d}t \tag{36}$$
$$= \sinh 2t + 2t + C_1 \tag{37}$$
$$= 2\sinh t\cosh t + 2t + C_1 \tag{38}$$
$$= 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} + \sinh^{-1}\frac{x}{2} + C_1 \tag{39}$$
$$= \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} + \ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C_2 \tag{40}$$

これまでに登場した様々な公式を用いている。不明な点があれば以前の節に戻るとよい。

8　定積分への利用

不定積分と特に変わることはない。逆関数の使用頻度が増える程度である。

例を示す。$x = 3\sinh t$ として置換を行う。このとき $t = \sinh^{-1}\frac{x}{3}$， $\mathrm{d}x = 3\cosh t\ \mathrm{d}t$ となる。

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9+x^2}} = \int_{\sinh^{-1}0}^{\sinh^{-1}1} \frac{3\cosh t\ \mathrm{d}t}{\sqrt{9+(3\sinh t)^2}} \tag{41}$$

$$= \int_0^{\sinh^{-1}1} dt \tag{42}$$

$$= \sinh^{-1}1 - 0 \tag{43}$$

$$= \ln(1+\sqrt{1^2+1}) \tag{44}$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) \tag{45}$$

$\sinh^{-1}0 = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-0}) = 0$ に注意する。

同様の置換で異なる例を示す。$\sqrt{x^2+3^2} = 3\sqrt{\sinh^2 x + 1} = 3\cosh x$

$$\int_0^3 \sqrt{9+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\sinh^{-1}1} \sqrt{9+(3\sinh t)^2}\cdot 3\cosh t\ \mathrm{d}t \tag{46}$$

$$= 9\int_0^{\sinh^{-1}1} \cosh^2 t\ \mathrm{d}t \tag{47}$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\sinh^{-1}1} (\cosh 2t + 1)\ \mathrm{d}t \tag{48}$$

$$= \frac{9}{2}\left[\frac{1}{2}\sinh 2t + t\right]_0^{\sinh^{-1}1} \tag{49}$$

$$= \frac{9}{2}\left[\sinh t\cosh t + t\right]_0^{\sinh^{-1}1} \tag{50}$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \sinh^{-1}1\right) \tag{51}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+9} + \ln(1+\sqrt{2})\right\} \tag{52}$$

高校範囲では上記の 2 パターンで全てだと思ってよい。

9　おまけ

$$I = \int \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\ \mathrm{d}x \tag{53}$$

$x = \frac{3}{2}\sinh t$ とおく。$dx = \frac{3}{2}\cosh t\ \mathrm{d}t$ である。また、$\sqrt{4x^2+9} = 3\cosh t$ となる。

$$I = \int \frac{\frac{27}{8}\sinh^3 t}{27\cosh^3 t}\cdot\frac{3}{2}\cosh t\ \mathrm{d}t \tag{54}$$

$$= \frac{3}{16}\int \frac{(\cosh^2 t - 1)\cosh t}{\cosh^3 t}\cdot\sinh t\ \mathrm{d}t \tag{55}$$

$u = \cosh t$ とおく。 $\mathrm{d}u = \sinh t \ \mathrm{d}u$ である。

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{3}{16}\int \frac{(u^2-1)u}{u^3}\ \mathrm{d}u && (56)\\
&= \frac{3}{16}\int \left(1-\frac{1}{u^2}\right)\ \mathrm{d}u && (57)\\
&= \frac{3}{16}\left(u+\frac{1}{u}\right)+C && (58)\\
&= \frac{3}{16}\left(\cosh t-\frac{1}{\cosh t}\right)+C && (59)\\
&= \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{4x^2+9}}{3}+\frac{3}{\sqrt{4x^2+9}}\right)+C && (60)\\
&= \frac{2x^2+9}{8\sqrt{4x^2+9}}+C && (61)
\end{aligned}
$$