Operações entre conjuntos

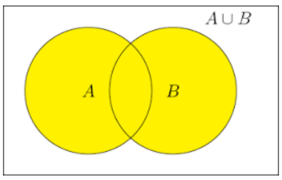
June 6, 2015

Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 4ão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum; C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1. Para montagem dos três catálogos, de quantas páginas originais de impressão o fabricante necessitará¿ O problema acima foi adaptado do ENEM, e para resolve-lo necessitamos de alguns conhecimentos sobre as operações com conjuntos os quais serão abordados aqui.

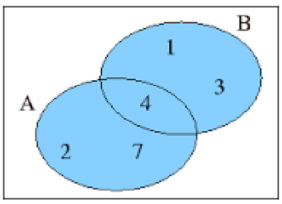
1 União

A união entre dois conjuntos, A e B, que indicamos por A∪B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A **ou** a B.
A∪B ={x | x ∈ A ou x ∈ B}

Podemos representar a união entre conjuntos por meio de diagramas:



Exemplo:
Dados os conjuntos A = {2, 4, 7} e B = {1,3,4}, temos: A∪B = {1,2,3,4,7}



Propriedades da união de conjuntos:

1. Se B é subconjunto de A, então A∪B = A; e, se A∪B = A, então B é subconjunto de A, ou seja: B⊂ A↔ A∪B = A

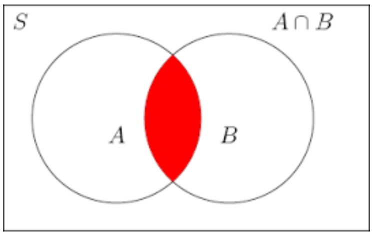
2. $A \cup B = B \cup A$

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2 *Intersecção*

A intersecção entre dois conjuntos, A e B, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B.
$A \cap B = \{x \mid x \in A$ **e** $x \in B\}$

Podemos representar a intersecção entre conjuntos por meio de diagramas:



Observação: Quando a intersecção entre os conjuntos A e B é o conjunto vazio, dizemos que A e B são **disjuntos**.

Exemplos

1. Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 5, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, temos: $A \cap B = \{2, 3\}$

2. Sendo A o conjunto dos números pares e B o conjuntos dos números ímpares, temos: $A \cap B = \emptyset$.

Propriedades da intersecção entre conjuntos:

1. $B \subset A \leftrightarrow A \cap B = B$

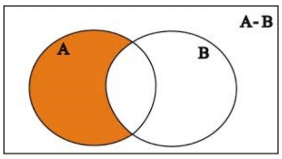
2. $A \cap B = B \cap A$

3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3 Diferença

A diferença de dois conjuntos, A e B, que indicamos por A–B, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.
$A - B = \{x \mid x \in A$ e $x \notin B\}$

Podemos representar o conjunto diferença por meio de diagramas:



Exemplos

1. Dados os conjuntos A = { - 1, 0, 1, 2} e B = {0, 2, 4, 6}, temos: A − B = { -1, 1}

2. Considerando os conjuntos do exemplo 1 temos: B − A = {4, 6}

Observação: Note que a diferença não é comutativa, de modo geral, temos que A − B $\neq$ B − A.

3.1 Exercícios

1. Considerando os conjuntos A = { -2, -1, 0, 1, 2}, B = {5, 6, 7, 8}, C = {1, 2, 5} e D = {1, 3, 4} determine:

   (a) A∪B

   (b) B∪ C∪D

   (c) A∩C

   (d) A∩B∩C

   (e) A–B

   (f) D–C

   (g) (A∪C)∩(B∪D)

   (h) (C–D)∩A

2. Sejam os conjuntos X = {3, 6, 9, 14, 18, 20} Y = {x | x é múltiplo positivo de 3} e Z = {x — x é divisor positivo de 12}, determine o conjunto:

   (a) X–Y

   (b) X–Z

   (c) Z–Y

   (d) (X∪Z)–Y

   (e) (Z∩Y)–(X∩Z)

3. (UFAL) Se A e B são dois conjuntos não vazio tais que: A∪B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A − B = {1, 3, 6, 7} e B − A = {4, 8} então, A∩B é o conjunto:

   (a) {1, 4}

   (b) { }

   (c) {2, 5}

   (d) {6, 7, 8}

   (e) {1, 3, 4, 6, 7, 8}

4. Faça um diagrama para representar cada um dos conjuntos abaixo:

   (a) C∪(A∩B)

   (b) B∩(A∪B)

   (c) A–(B∩C)

   (d) A–(B∪C)

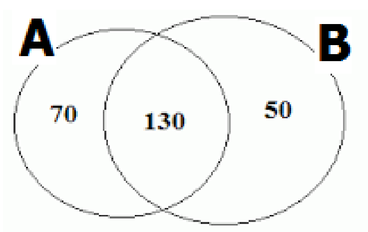
4 Número de elementos da União de conjuntos

Considere a seguinte situação: uma atividade com duas questões foi aplicada em uma turma de 40 alunos. Os resultados indicam que 35 alunos acertaram a 1ª questão, 25 acertaram a 2ª questão e que 20 alunos acertaram as duas questões. Os dados sugerem que a soma das partes é maior do que o todo: 35 + 25 + 20 = 80 ¿ 40. Analisando o problema temos:
n(A) = 35 → número de alunos que acertaram a 1ª questão
n(B) = 25 → número de alunos que acertaram a 2ª questão
n(A∩B) = 20 → número de alunos que acertaram a 1ª e a 2ª questão
n(A∪B) = 40 → número de alunos que acertaram a 1ª ou a 2ª questão
Note que n(A) inclui n(A∩B) e que n(B) também inclui n(A∩B), por isso para determinar o número de elementos da união devemos somar o número de elementos de A e B e subtrair o números de elementos da intersecção entre os conjuntos. Quando A e B são conjuntos finitos, têm-se:

$$\mathbf{n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)}$$

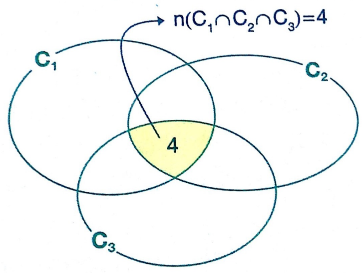
No caso geral em que A e B são conjuntos disjuntos temos n(A∪B) = n(A) + n(B).

Podemos usar esse fato para resolver problemas sobre a quantidade de elementos de conjuntos finitos, vejamos o exemplo.
Exemplo: Um instituto de pesquisa entrevistou 250 indivíduos, perguntando sobre sua rejeição aos partidos A e B. Verificou-se que 200 pessoas rejeitavam o partido A; que 180 pessoas rejeitavam o partido B. Qual é o número de pessoas que rejeitavam os dois partidos?
Resolução:
n(A) = 200
n(B) = 180
n(A∪B) = 250
Como $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) \Longrightarrow n(A\cap B) = n(A) + n(B) - n(A\cup B)$
n(A∩B) = 200 + 180 − 250
n(A∩B) = 130
Logo, 130 pessoas rejeitavam os dois partidos.
O problema pode ser visualizado no diagrama a seguir:

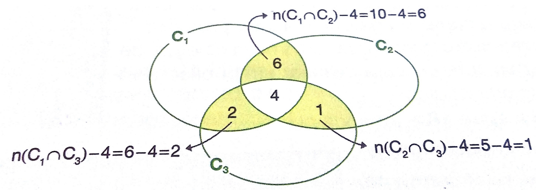


Agora, podemos resolver o problema proposto no inicio deste capitulo.
Resolução
Inicialmente, chamamos de C1, C2 e C3 o conjunto das páginas dos catálogos C1, C2 e C3, respectivamente, ou seja:
n(C1) = 50
n(C2) = 45

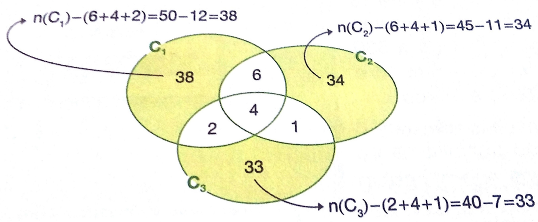
n(C3) = 40
n(C1∩C2) = 10
n(C1∩C3) = 6
n(C2∩C3) = 5
n(C1∩C2∩C3) = 4
Anotamos no diagrama o número de páginas comuns aos três catálogos.



Em seguida, anotamos no diagrama o número de páginas comuns a dois catálogos subtraídos do valor já registrado.



Finalmente, anotamos no diagrama o número de páginas de cada catálogo subtraídos dos valores já registrados.



Calculamos o total de páginas necessárias para a montagem dos três catálogos:
n(C1∪C2∪C3) = 38 + 6 + 34 + 2 + 4 + 1 + 33 = 118
Portanto, o fabricante necessitará de um total de 118 páginas originais de impressão.

No caso de três conjuntos , A, B e C, a fórmula que indica o número de elementos da união ABC é:

$$\mathbf{nA \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

4.1 Exercícios