Licenciatura en Ciencia de la Computación

Sistemas de ecuaciones

Álgebra I

Profesor:
Miguel Ángel Muñoz Jara

Integrantes:
Pablo Corrales
Matías Fuentes
Sergio Salinas
Claudio Saji

.

Introducción

El siguiente trabajo es una solución a la guía de sistemas de ecuaciones de álgebra II, esta guía puede ser encontrada aquí.

Soluciones

1. Reduzca a su forma escalonada por filas de las siguientes matrices.

$$(1)\ \begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -2\\ 4 & 2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{f_2-2f_1\\ 2f_3-f_1}}{=} \begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 6 & 4\\ 0 & -5 & 9 & 10\\ 0 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix} \underset{f_2 \rightleftharpoons f_4}{=} \begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -5 & 9 & 10\\ 0 & 0 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

$$\underset{3f_3+5f_2}{=} \begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 32 & 35\\ 0 & 0 & 6 & 4\end{pmatrix} \underset{16f_4-3f_3}{=} \begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 32 & 35\\ 0 & 0 & 0 & -41\end{pmatrix}$$

$$(2)\ \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ 3 & 4 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{2f_2-3f_1\\ f_3-2f_1}}{=} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 4 & -7\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

$$(3)\ \begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \underset{3f_2-5f_1}{=} \begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 4\\ 0 & -7 & 3 & -11\end{pmatrix}$$

$$(4)\ \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix} \underset{f_2-2f_1}{=} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 3\\ 0 & 7 & -5 & -4\\ 0 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix} \underset{7f_3-f_2}{=} \begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 3\\ 0 & 7 & -5 & -4\\ 0 & 0 & -9 & 18\end{pmatrix}$$

2. Usando el teorema del rango determine si los siguiente sistemas tienen o no solución, en caso afirmativo, determine la solución o las soluciones.

$$(5)\ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & & & = & 0\\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0\\ 4x & + & 9y & - & 3z & = & 0\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r}3 & 4 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0\\ 4 & 9 & -3 & 0\end{array}\right] \underset{f_2+f_3}{=} \left[\begin{array}{rrr|r}3 & 4 & 0 & 0\\ 6 & 8 & 0 & 0\\ 4 & 9 & -3 & 0\end{array}\right] \underset{f_2:2}{=} \left[\begin{array}{rrr|r}3 & 4 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & 9 & -3 & 0\end{array}\right]$$

$$\underset{f_3 \rightleftharpoons f_1}{=} \left[\begin{array}{rrr|r}4 & 9 & -3 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\end{array}\right] \underset{\substack{f_1-f_2\\ f_3-f_2}}{=} \left[\begin{array}{rrr|r}1 & 5 & -3 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\underset{f_3-3f_1}{=} \left[\begin{array}{rrr|r}1 & 5 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$\therefore$ Como $\rho(A) = \rho(A/b) < 3$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

$$(6)\ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & - & 7z & = & 6\\ 2x & - & y & + & 8z & = & 2\\ 6x & + & 4y & - & 14z & = & 5\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & 8 & 2 \\ 6 & 4 & -14 & 5 \end{array}\right] \underset{\substack{f_1 - f_2 \\ f_3 - 2f_1}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -15 & 4 \\ 2 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{f_2 - 2f_1}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -15 & 4 \\ 0 & -5 & 38 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{f_2 - f_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -15 & 4 \\ 0 & 1 & 38 & -7 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{f_3 + 4f_2}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -15 & 4 \\ 0 & 1 & 38 & -7 \\ 0 & 0 & 152 & 27 \end{array}\right]$$

$\therefore$ Como $\rho(A) = \rho(a/b) = n$ entonces el sistema tiene solución única.

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc|} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & 2 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & -18 \\ \hline \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -18 \end{array}\right] \underset{\substack{f_2 - 3 \cdot f_1 \\ f_3 - 5 \cdot f_1}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -16 \\ 0 & -6 & -12 & -48 \end{array}\right] \underset{f_3 - 3 \cdot f_2}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\therefore$ Como $\rho(A) = \rho(A/b) < 3$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc|} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \\ f_4 - 3 \cdot f_1}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{f_3 \rightleftharpoons f_2 \\ f_4 \cdot \frac{1}{2}}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{f_3 + 3f_2 \\ f_4 + f_2}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right] \underset{f_4 - \frac{1}{2} \cdot f_3}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\therefore$ Como $\rho(A) = \rho(A/b) = 3$, entonces el sistema admite solución única

$$(9) \quad \begin{array}{ccccccccc|} 1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 1x_4 & = & 0 \\ 1x_1 & - & 1x_2 & + & 1x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 1x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & -4 \\ 1x_1 & + & 8x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & -8 \\ \hline \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} = \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \\ f_4 - f_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} = \\ f_2 * -1 \\ f_4 : -2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} = \\ f_3 - f_2 \\ f_4 - f_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Considerando, entonces, el teorema de Roché-Frobenius, comprobamos que el rango de la matriz incompleta es igual al rango de la matriz ampliada -completa-.

$$\therefore \text{Como, } \rho(A) = \rho(A/b) < 4; \text{ el sistema tiene infinitas soluciones.}$$

$$(10) \quad \begin{array}{ccccccc} (1-i)x & - & iy & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & (1+i)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & -i \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} (1-i) & -i & 2 & 0 \\ 2 & (1+i) & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -i \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} = \\ f_2 - (1 + i(f_1)) \\ f_3 - (\frac{1}{2} + \frac{i}{2}(f_1)) \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} (1-i) & -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & -(1+2i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & -i & -i \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} = \\ (1-i) * f_3 - \frac{-i}{2} * f_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} (1-i) & -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & -(1+2i) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3i}{2} & -(1+i) \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} = \\ \frac{2}{-3i} * f_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} (1-i) & -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & -(1+2i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} - \frac{2i}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} = \\ \frac{1}{2} * (f_2 + 1 + 2i(f_3)) \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} (1-i) & -i & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{i}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} - \frac{2i}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} = \\ f_1 - (\frac{1}{i} * f_2 + 2 * f_3) \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} (1-i) & 0 & 0 & \frac{-1}{3} + \frac{5i}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{i}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} - \frac{2i}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} = \\ f_1 * \frac{1}{1-i} \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{3} + \frac{2i}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{i}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} - \frac{2i}{3} \end{array}\right]$$

Considerando, entonces, el teorema de Roché-Frobenius, comprobamos que el rango de la matriz incompleta es igual al rango de la matriz ampliada -completa-.

$\therefore$ Como, $\rho(A) = \rho(A/b) = 3$; el sistema tiene solución única:

x=-1+$\frac{2i}{3}$ y=$\frac{1}{3} - \frac{i}{3}$ z=$\frac{2}{3} - \frac{2i}{3}$

3. Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcr} kx & + & y & = & 1 \\ x & + & ky & = & 1 \end{array}\right| (*)$$

Determine los conjuntos

$$\begin{array}{l} S_1 = \{k \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene soluciones}\} \\ S_2 = \{k \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\} \\ S_3 = \{k \in \mathbb{R} | (*) \text{ no tiene solución}\} \end{array}$$

La matriz será:

$$\left[\begin{array}{cc|c} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{array}\right] \overset{=}{f_1 \rightleftharpoons f_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{=}{f_2 - kf_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right]$$

Así, las soluciones respectivas serán:

$$\begin{array}{l} S_1 = \{k \in \mathbb{R} | k \neq 1 \wedge k \neq -1\} \\ S_2 = \{k \in \mathbb{R} | k = 1\} \\ S_3 = \{k \in \mathbb{R} | k = -1\} \end{array}$$

4. Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & by & - & cz & = & 0 \\ -ax & + & y & - & cz & = & 0 \\ -ax & - & by & + & z & = & 0 \end{array}\right| (*)$$

Demuestre que si $(*)$ no tiene solución única entonces se verifica

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = 1$$

Para que el sistema $(*)$ no tenga sol única entonces $\rho(A) < 3$, esto se puede comprobar fácilmente viendo cuando det(A) = 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -b & -c \\ -a & 1 & -c \\ -a & -b & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2abc - ac - bc - ab$$

$$\begin{aligned}
|A| &= 0 \\
1-2abc-ac-bc-ab &= 0 \\
1 &= 2abc+ac+bc+ab \;/ +a+b+c+bc+ac+ab+abc \\
a+b+c+bc+ac+ab+abbc+1 &= 3abc+2ac+2abc+2ab+a+b+c \\
(1+b+a+ab)(1+c) &= a(1+c+b+bc)+b(1+c+a+ac)+c(1+b+a+ab) \\
(1+a)(1+b)(1+c) &= a(1+b)(1+c)+b(1+a)(1+c)+c(1+a)(1+b) \\
1 &= \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} \\
\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} &= 1
\end{aligned}$$

$\therefore$ Se ha demostrado que la afirmación es válida

5. Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_1 & + & x_2 & + & (a^2-4)x_3 & = & a
\end{array}\right| (*)$$

$S_1 = \{a \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene solución única}\}$
$S_2 = \{a \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$
$S_3 = \{a \in \mathbb{R} | (*) \text{ no tiene solución}\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-4 & a \end{array}\right] \begin{array}{c} = \\ f_2-f_1 \\ f_3-f_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a-2 \end{array}\right]$$

$\therefore$ Si $a^2-3=0$, o sea, $a=\sqrt{3} \vee a=-\sqrt{3}$ $\rho(A) \neq \rho(A/b)$
entonces el sistema no admite solución
Si $a^2-3 \neq 0$, o sea, $a \neq \sqrt{3} \wedge a \neq -\sqrt{3}$ $\rho(A) = \rho(A/b) = 3$
entonces el sistema admite solución única

6. Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
(1-\lambda)x & + & 1y & + & 1z & = & 0 \\
2x & + & (2-\lambda)y & + & 2z & = & 0 \\
1x & + & 1y & + & (1-\lambda)z & = & 0
\end{array}\right|$$

$S = \{\lambda \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$

$$\left|\begin{array}{ccc} (1-\lambda) & 1 & 1 \\ 2 & (2-\lambda) & 2 \\ 1 & 1 & (1-\lambda) \end{array}\right| = \begin{array}{c} (1-\lambda)^2 * (2-\lambda)+2+2 \\ - \\ (2+\lambda)+2(1-\lambda)+2(2-\lambda) \end{array} = \lambda^3-4\lambda^2$$

$$\lambda^3-4\lambda^2=0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 4\lambda) = 0 \setminus \lambda = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0 \setminus \lambda = 0$$

$$\lambda - 4 = 0 \setminus \lambda = 4$$

Considerando, entonces, por el método de Cramer: Dado que la determinante en el numerador es cero, solo si la ecuación encontrada en la determinande de la matriz es igual a cero, se darán soluciones infinitas. En efecto:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & (2-\lambda) & 2 \\ 0 & 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 2 & (2-\lambda) & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ & & & & \\ 0+0+0-(0+0+0) & = & 0+0+0-(0+0+0) & = & 0+0+0-(0+0+0) \\ 0 & = & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\therefore \text{Como, } \rho(A) = \rho(A/b) < 3\text{; el sistema tiene infinitas soluciones si:}$$

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda = 0 \vee \lambda = 4\}$$

7. Si A $= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Entonces determine el conjunto.

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} | AX = \lambda X\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} = \\ f_2 + f_1 \\ f_4 - 3f_5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por recomendación del profesor X será una matriz columna con las incógnitas del sistema. Por lo que el sistema queda como.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \\ \lambda x_5 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 5x_3 \\ x_4 + 3x_5 \\ -10x_5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 5x_3 \\ x_4 + 3x_5 \\ -10x_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \\ \lambda x_4 \\ \lambda x_5 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & \lambda x_1 \\ 5x_3 & = & \lambda x_2 \\ x_4 + 3x_5 & = & \lambda x_3 \\ -10x_5 & = & \lambda x_4 \\ 0 & = & \lambda x_5 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} (1-\lambda)x_1 - x_2 & = & 0 \\ -\lambda x_2 + 5x_3 & = & 0 \\ x_4 - \lambda x_3 + 3x_5 & = & 0 \\ -\lambda x_4 - 10x_5 & = & 0 \\ \lambda x_5 & = & 0 \end{array}\right|$$

Despejando las variables del sistema se tiene que: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$

$$\therefore \mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R}\}$$

8. Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{ccccccc} dx & + & (2d-1)y & + & (d+2)z & = & 1 \\ 0x & + & (d-1)y & + & (d-3)z & = & 1+d \\ dx & + & (3d-2)y & + & (3d+1)z & = & 2-d \end{array}\right|$$

a) Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{d \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene solución}\}$$

b) Para d $\in \mathbb{S}$, (Si $\mathbb{S} \neq \oslash$), determine el conjunto.

$$\mathbb{X} = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3x1) | \text{ X es solución de } (*) \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} d & 2d-1 & d+2 & 1 \\ 0 & d-1 & d-3 & 1+d \\ d & 3d-2 & 3d+1 & 2-d \end{array}\right] \underset{f_3-(f_1+f_2)}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} d & 2d-1 & d+2 & 1 \\ 0 & d-1 & d-3 & 1+d \\ 0 & 0 & d+2 & -2d \end{array}\right]$$

$$\underset{f_2 - \frac{2d-1}{d-1}\cdot f_1}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} d & 0 & d+2 & 1 \\ 0 & d-1 & -(d+2) & \dfrac{d(d-2)}{d-1} \\ 0 & 0 & d+2 & -2d \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{f_1 - f_3 \\ f_2 + f_3}}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} d & 0 & 0 & 1+2d \\ 0 & d-1 & 0 & \dfrac{d^2}{1-d} \\ 0 & 0 & d+2 & -2d \end{array}\right]$$

$$\therefore \mathbb{S} = \{d \in \mathbb{R} | d \neq -2 \wedge d \neq 0 \wedge d \neq 1\}$$

Al dividir: $f_1/d \wedge f_2/(d-1) \wedge f_3/(d+2)$ Obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1+2d}{d} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-d^2}{(d-1)^2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-2d}{d+2} \end{array}\right] \Rightarrow \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2d}{d} \\ \\ \dfrac{-d^2}{(d-1)^2} \\ \\ \dfrac{-2d}{d+2} \end{pmatrix}$$

9. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 3x & - & 3y & + & 1z & = & 1 \\ x & + & 0y & + & 3z & = & a+1 \\ ax & + & 1y & + & 0z & = & -a \end{array}\right| (*)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \{a \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene solución única}\} \\ S_2 &= \{a \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\} \\ S_3 &= \{a \in \mathbb{R} | (*) \text{ no tiene solución}\} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad = \quad 0 - 9a + 1 - 0 + 9 - 0 \quad = \quad -9a + 8$$

$$a \neq \frac{8}{9} \setminus \text{Descartamos indeterminancia.}$$

Considerando, entonces, por el método de Cramer: Dado que la determinante en el numerador es cero, solo si la ecuación encontrada en la determinande de la matriz es igual a cero, se darán soluciones infinitas. En efecto:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ a+1 & 0 & 3 \\ -a & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 3 \\ a & -a & 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 + 9a + a + 1 - 3 & ; & 0 + 3a - a - a^2 - a + 9a & ; & -3a^2 - 3a + 3 - 3a - 3 - 3a \\ 10a - 2 & ; & 8a - a^2 + 2 & ; & 2 + 9a - 3a^2 \\ \rightarrow a = \frac{2}{10} & ; & \rightarrow a = 4 \pm 3\sqrt{2} & ; & \rightarrow a = \frac{1}{6} * (9 \pm \sqrt{105}) \end{array}$$

Con este paso, además encontramos las soluciones únicas para este sistema:

x=$\frac{10a-2}{-9a+8}$ y=$\frac{-a^2+8a+2}{-9a+8}$ z=$\frac{-3a^2+9a+2}{-9a+8}$

Finalmente, si evaluamos la determinante de la matriz ampliada, obtendremos:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & a+1 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} \quad = \quad 9a + a + 1 + 0 - 3 \quad = \quad 10a - 2$$

Luego, si 10a-2 $\rightarrow$ a $\neq$ 2/10, entonces el conjunto solución es vacío.

$$\therefore \text{Como, } \rho(A) = \rho(A/b) < 4; \text{ el sistema tiene:}$$

$$\text{Una única solucion para } \mathbb{S}_1 = \{a \in \mathbb{R}, \quad a = \frac{8}{9}\}$$

$$\text{Infinitas soluciones con } \mathbb{S}_2 = \{a \in \mathbb{R}, \quad a = \frac{1}{5} \wedge a = 4 \pm 3\sqrt{2} \wedge a = \frac{1}{6} * (9 \pm \sqrt{105}\}$$

$$\text{Solución vacía si } \mathbb{S}_3 = \{a \in \mathbb{R}, \quad a \neq \frac{1}{5}\}$$

10. Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & - & z & = & m+1 \end{array}\right| (*)$$

$S_1 = \{m \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene solución única}\}$
$S_2 = \{m \in \mathbb{R} | (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$
$S_3 = \{m \in \mathbb{R} | (*) \text{ no tiene solución}\}$

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{array}\right]
&\underset{f_1 \leftrightharpoons f_3}{=}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right] \\
&\underset{\substack{f_2 - mf_1 \\ f_3 - f_1}}{=}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & m-m(m+1) \\ 0 & m-1 & 0 & -m \end{array}\right] \\
&\underset{f_3 + f_2}{=}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & m-m(m+1) \\ 0 & 0 & -1 & -m(m+1) \end{array}\right] \\
&\underset{f_1 - \frac{1}{1-m}f_2}{=}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2-m}{1-m} & \frac{1}{1-m} \\ 0 & 1-m & -1 & m-m(m+1) \\ 0 & 0 & -1 & -m(m+1) \end{array}\right] \\
&\underset{f_1 + \frac{2-m}{1-m}f_3}{=}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m} \\ 0 & 1-m & -1 & m-m(m+1) \\ 0 & 0 & -1 & -m(m+1) \end{array}\right] \\
&\underset{f_2 - f_3}{=}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m} \\ 0 & 1-m & 0 & m \\ 0 & 0 & -1 & -m(m+1) \end{array}\right] \\
&\underset{\substack{\frac{1}{1-m}f_2 \\ -1f_3}}{=}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{m^3-m^2-2m+1}{1-m} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{m}{1-m} \\ 0 & 0 & 1 & m(m+1) \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Solución única

$$\mathbb{S}_1 = \{m \in \mathbb{R} | m \neq 1\}$$

No tiene Solución

$$\mathbb{S}_2 = \{m \in \mathbb{R} | m = 1\}$$

Infinitas soluciones

$$\mathbb{S}_3 = \{m \in \mathbb{R} | m \in \phi\}$$

11. Considere el siguiente sistema lineal

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & (a^2+1)x_3 & = & a \end{array}\right| (*)$$

Determine los siguientes conjuntos

$$\begin{array}{l} S_1 = \{a \in \mathbb{R} | (*) \text{ Tiene solución}\} \\ S_2 = \{a \in \mathbb{R} | (*) \text{ Tiene solución única}\} \\ S_3 = \{a \in \mathbb{R} | (*) \text{ No tiene solución}\} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & a^2+1 & a \end{array}\right] \begin{array}{c} = \\ f_2 - 2f_1 \\ f_3 - f_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & a^2+2 & a-2 \end{array}\right] \begin{array}{c} = \\ f_2 \rightleftharpoons f_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & a^2+2 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Como $x_3 = -1$ entonces se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} -2x_2 - (a^2+2) &= a-2 \\ -2x_2 &= a - 2 + a^2 + 2 \\ x_2 &= -\frac{a^2+a}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 1 &= 2 \\ x_1 - \frac{a^2+a}{2} + 1 &= 2 \\ x_1 &= 1 + \frac{a^2+a}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{array}{l} S_1 = \{a \in \mathbb{R}\} \\ S_2 = \{a \in \mathbb{R}\} \\ S_3 \text{ no existe ya que para ningún valor dea se puede anular una fila de A} \end{array}$$

12. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ ax & + & by & + & (b+3)z & = & 2 \end{array}\right| (*)$$

$$\begin{array}{l} S_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | (*) \text{ tiene solución única}\} \\ S_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | (*) \text{ tiene infinitas soluciones}\} \\ S_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | (*) \text{ no tiene solución}\} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{array}\right] \begin{array}{c} = \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 2 & 1 \\ 0 & b-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 2(b-1) \end{array}\right]$$

$\therefore$ Del sistema escalonado se pueden ver las siguientes soluciones.

$$\begin{array}{l} S_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \neq 0 \wedge b \neq -1\} \\ S_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \neq 0 \wedge b = 1\} \\ S_3 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | b = -1\} \end{array}$$